Démonstration nouvelle d'un théorème de Klein et Poincaré.*)

Par B. DE KERÉKJÁRTÓ à Szeged.

Nous allons donner dans cette Note une nouvelle démonstration simple du théorème suivant dû à KLEIN et POINCARÉ:

Une surface de RIEMANN *algébrique de genre* $p > 1$ *n'admet qu'un nombre fini de représentations conformes (c'est-à-dire birationnelles) en elle-même.*

Notre démonstration diffère de celle de POINCARÉ[1]) surtout en ce que la nôtre évite l'application des transformations infiniésimales.

Désignons par $\bar{F}$ la surface de recouvrement à connexion simple de la surface donnée F. Nous représentons $\bar{F}$ conformément sur l'intérieur Φ du cercle unité que nous considérons comme un plan hyperbolique. Au groupe de connexion (ou groupe fondamental) de F correspond un groupe Γ de substitutions linéaires hyperboliques de Φ en soi-même proprement discontinu dans Φ. Deux points de Φ seront appelés *équivalents* si une substitution de Γ transforme l'un de ces points en l'autre. À chaque point P de F correspond un système de points équivalents dans Φ.

Soit T une représentation conforme de F en soi-même; à T correspondent des représentations conformes de Φ en soi-même, ce sont des transformations linéaires τ jouissant de la propriété suivante: étant $\bar{P}$ un point quelconque de Φ correspondant au point P de F, l'image $\tau(\bar{P}) = \bar{P}'$ de $\bar{P}$ est un point correspon-

---

*) Le contenu de cette Note a été présenté à l'Académie des Sciences Hongroise, dans la séance du 8 Octobre 1934.

[1]) H. POINCARÉ, Sur un théorème de M. Fuchs, *Acta Math.*, 7 (1885), pp. 1—32; voir surtout pp. 16—19.

dant au point $P' = T(P)$ de F. La transformation τ transforme tout système de points équivalents en un système de points équivalents; de là il résulte immédiatement que τ est échangeable avec le groupe Γ: $\tau^{-1}\Gamma\tau = \Gamma$, et que toute autre transformation de Φ correspondante à T peut être exprimée sous chacune des deux formes $\tau\gamma$ et $\gamma'\tau$, où γ et γ' sont des substitutions de Γ.

Désignons par π un *domaine fondamental* dans Φ contenant à tout point de Φ un point équivalent et un seul; soit O un point quelconque de π. Il y a une transformation correspondante à T et une seule qui transforme O en un point du même domaine π.

Soit π_1 un domaine équivalent à π (différent de π) et soit γ la substitution de Γ transformant π en π_1. *Si la transformation τ transforme les points O et $\gamma(O)$ en des points appartenants respectivement aux domaines π et $\gamma(\pi)$, les transformations τ et γ sont échangeables.* Comme $\tau^{-1}\Gamma\tau = \Gamma$, donc $\gamma' = \tau^{-1}\gamma\tau$ appartient à Γ; les points $\gamma(\tau(O))$ et $\gamma'(\tau(O)) = \tau(\gamma(O))$ sont équivalents. $\tau(O)$ appartient au domaine π, par conséquent $\gamma(\tau(O))$ appartient à π_1. Les points $\gamma(\tau(O))$ et $\tau(\gamma(O))$ sont deux points équivalents appartenants au même domaine fondamental π_1, ils doivent être identiques. Donc le point $\gamma(\tau(O))$ est invariant dans la transformation produit de γ^{-1} et $\tau^{-1}\gamma\tau$. Étant ce produit une substitution de Γ, il doit être l'identité, de sorte que $\tau\gamma = \gamma\tau$. — *Si τ n'est pas l'identité, τ est une substitution hyperbolique ayant les mêmes points doubles que γ* (voir l. c. [1])). En effet l'image d'un point double de τ dans la substitution γ est un point double de $\gamma^{-1}\tau\gamma = \tau$; alors ou bien γ échange les points doubles de τ et vice versa τ échange les points doubles de γ, ou bien τ et γ ont les mêmes points doubles. Or la première possibilité est exclue parce que dans ce cas les points doubles de τ et ceux de γ seraient tous invariants dans la transformation γ^2; celle-ci aurait donc plus de deux points invariants, elle devrait être l'identité; mais c'est impossible, étant γ une substitution hyperbolique.

Soient γ_1 et γ_2 deux substitutions non échangeables de Γ; si la transformation τ transforme chacun des trois points équivalents O, $\gamma_1(O)$, $\gamma_2(O)$ en des points appartenants respectivement aux domaines π, $\gamma_1(\pi)$, $\gamma_2(\pi)$, alors τ est l'identité. D'après ce que nous venons de démontrer τ est échangeable avec γ_1 et γ_2. Si τ n'était pas l'identité, les points doubles de τ seraient identiques d'une part avec les points doubles de γ_1, d'autre part avec ceux de γ_2, et alors les deux substitutions hyperboliques γ_1 et γ_2 ayant les mêmes points doubles seraient échangeables contre l'hypothèse.

Soient π_1 et π_2 deux domaines voisins de π, images de π par les substitutions γ_1 et γ_2 de Γ, tels que γ_1 et γ_2 ne soient pas échangeables. Soit δ un nombre supérieur aux distances hyperboliques $(O, \gamma_1(O))$ et $(O, \gamma_2(O))$. Il n'y a qu'un nombre fini $r+1$ de domaines équivalents à π dont les distances de π sont inférieures à δ; nous les désignons par $\pi, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$. — Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n$ des représentations conformes de F en soi-même, et soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ les transformations de Φ leur correspondantes qui transforment le point O en des points $\tau_k(O)$ appartenants au domaine π. Les transformations linéaires τ_k conservent les distances hyperboliques, par conséquent la distance des points O et $\gamma_i(O)$ $(i = 1, 2)$ est la même que la distance des points $\tau_k(O)$ et $\tau_k(\gamma_i(O))$. Les points $\tau_k(O)$ appartiennent au domaine π, donc tous les points $\tau_k(\gamma_i(O))$ ont des distances inférieures à δ du domaine π, et alors ils appartiennent aux domaines $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$. Si le nombre n des transformations T_k est plus grand que $\binom{r}{2}$, il y a deux indices p et q tels que les points $\tau_p(\gamma_1(O))$ et $\tau_q(\gamma_1(O))$ appartiennent à un même domaine équivalent à π, de même les points $\tau_p(\gamma_2(O))$ et $\tau_q(\gamma_2(O))$. La transformation $\tau_p^{-1}\tau_q$ transforme chacun des trois points équivalents $\tau_p(O)$, $\tau_p(\gamma_1(O))$, $\tau_p(\gamma_2(O))$ en des points $\tau_q(O)$, $\tau_q(\gamma_1(O))$, $\tau_q(\gamma_2(O))$ appartenants respectivement aux mêmes domaines équivalents à π. De notre proposition cidessus, il résulte que $\tau_p^{-1}\tau_q$ est l'identité, d'où $\tau_p = \tau_q$ et $T_p = T_q$. De la sorte, nous avons démontré que le nombre des représentations conformes de F en soi-même ne peut pas dépasser le nombre $\binom{r}{2}$.

Le même raisonnement nous montre que *les représentations conformes d'une surface orientable quelconque F en elle-même forment un groupe proprement discontinu sur F, pourvu que le groupe de connexion de F contienne au moins deux éléments non échangeables;* les cas exclus sont donc les surfaces homéomorphes d'une sphère, d'un cercle, d'une couronne circulaire ou d'un tore[2]).

(Reçu le 9. Octobre 1934)

---

[2]) *voir* par exemple, H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig und Berlin, 1913), p. 163.